Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 8 (I)

Inhaltsverzeichnis

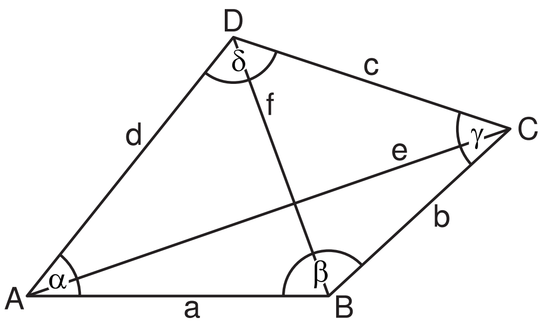
Stand: 08.12.2021

Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 8 (I)

Vierecke

1 Allgemeine Vierecke

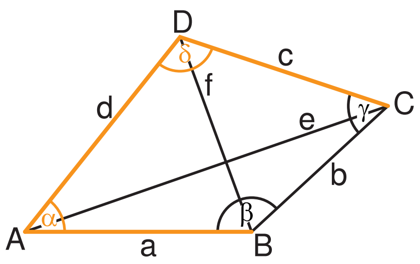
1.1 Bezeichnungen



1.2 Konstruktion über fünf Bestimmungsstücke

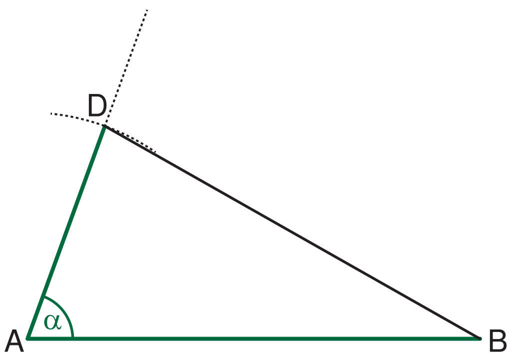
Beispiel: Konstruktion des Vierecks ABCD mit $a = 6\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$, $d = 3\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$, $\delta = 135°$

Planfigur:



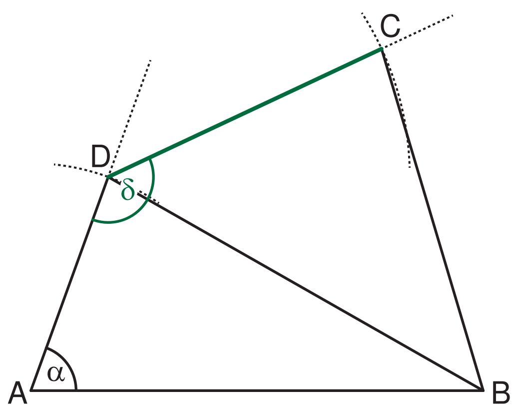
1. Schritt:

Konstruktion des Teildreiecks ABD aufgrund des Kongruenzsatzes
SWS $(\text{mit } a = 6\,\text{cm};\, d = 3\,\text{cm};\, \alpha = 70°)$



2. Schritt:

Antragen des Winkels mit dem Maß δ und der Seite mit der Länge c



2 Spezielle Vierecke

Quadrat

Seiten:

- $a = b = c = d$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Diagonalen:

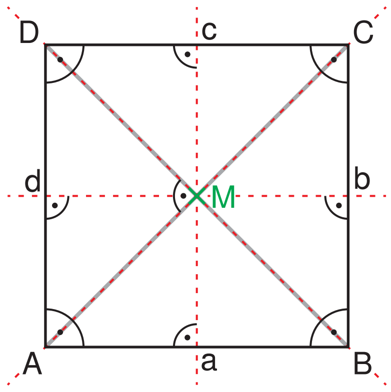
- $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$
- $|\overline{AM}| = |\overline{MC}| = |\overline{BM}| = |\overline{MD}|$
- $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Innenwinkel:

- vier rechte Winkel

Symmetrie:

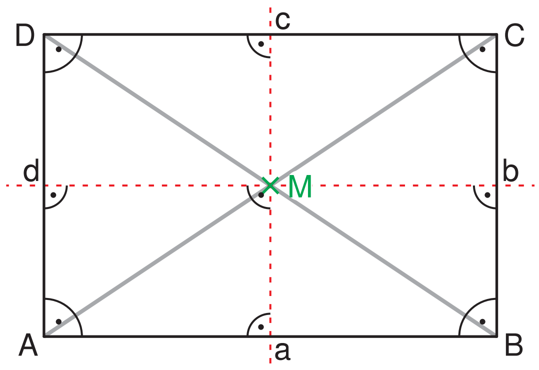
- je zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen
- ein Symmetriezentrum



- - - - - Symmetrieachsen

× M Symmetriezentrum

Rechteck



Seiten:

- $a = c \,;\, b = d$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Diagonalen:

- $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$
- $|\overline{AM}| = |\overline{MC}| = |\overline{BM}| = |\overline{MD}|$

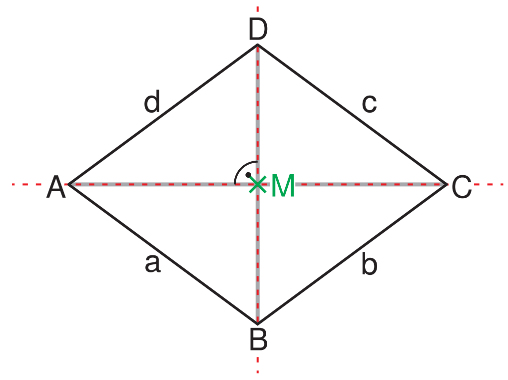
Innenwinkel:

- vier rechte Winkel

Symmetrie:

- zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen
- ein Symmetriezentrum

Raute



Seiten:

- $a = b = c = d$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Diagonalen:

- $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- $|\overline{AM}| = |\overline{MC}|$; $|\overline{BM}| = |\overline{MD}|$

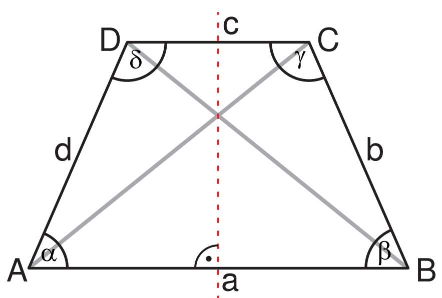
Innenwinkel:

- $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$
- Halbierung gegenüberliegender Winkel durch die Diagonalen

Symmetrie:

- zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen
- ein Symmetriezentrum

Gleichschenkliges Trapez



Seiten:

- $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Diagonalen:

- $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$

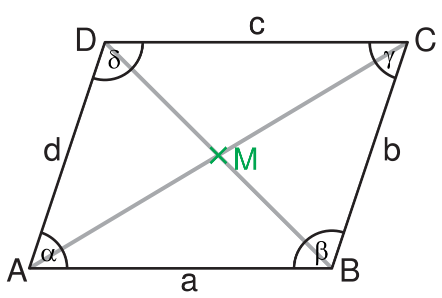
Innenwinkel:

- $\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$
- $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

Symmetrie:

- eine Symmetrieachse

Parallelogramm



Seiten:

- $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$; $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Diagonalen:

- $|\overline{AM}| = |\overline{MC}|$; $|\overline{BM}| = |\overline{MD}|$

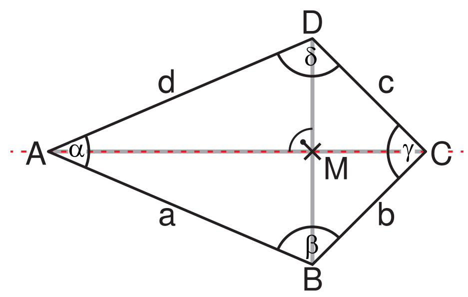
Innenwinkel:

- $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$
- $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$

Symmetrie:

- ein Symmetriezentrum

Drachenviereck



Seiten:

- $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$; $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$

Diagonalen:

- $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- $|\overline{BM}| = |\overline{MD}|$

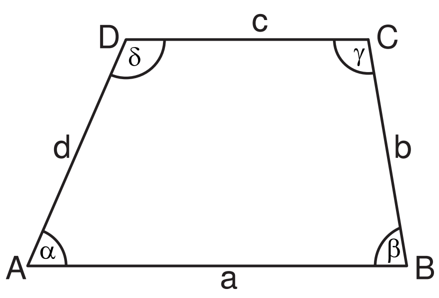
Innenwinkel:

- $\beta = \delta$
- Halbierung von α und γ durch Diagonale

Symmetrie:

- eine Symmetrieachse

Allgemeines Trapez



Seiten:

- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Innenwinkel:

- $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

Symmetrie:

- keine

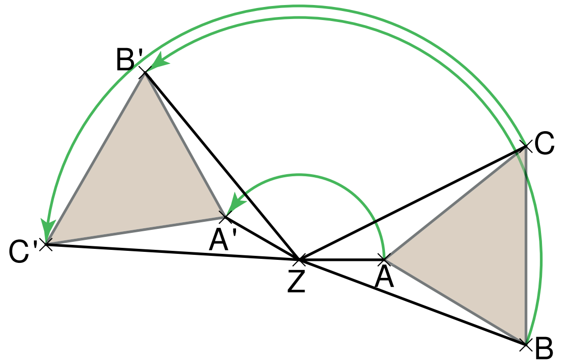
Drehung

1 Die Drehung und ihre Eigenschaften

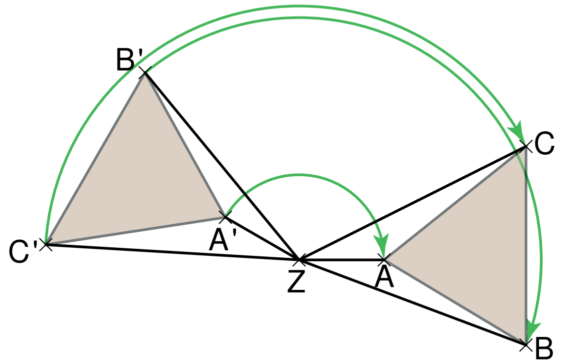
Eigenschaften: $P \xmapsto{Z;\alpha} P'$ Drehzentrum Z; Drehwinkel α

- Die Strecken $\overline{PZ}$ und $\overline{P'Z}$ sind gleich lang und schließen den Winkel PZP' mit dem Maß α ein.
- Sie ist längen-, geraden-, winkel-, parallelen- und kreistreu.
- Ur- und Bildfigur haben den gleichen Umlaufsinn.
- Außer dem Drehzentrum Z gibt es keinen Fixpunkt.
- Die Drehung ist eine **Kongruenzabbildung**.

Beispiel: $\Delta ABC \xmapsto{Z;\alpha=150°} \Delta A'B'C'$



Für die Umkehrabbildung gilt: $\Delta A'B'C' \xmapsto{Z;\alpha=-150°} \Delta ABC$ (Drehung im Uhrzeigersinn)



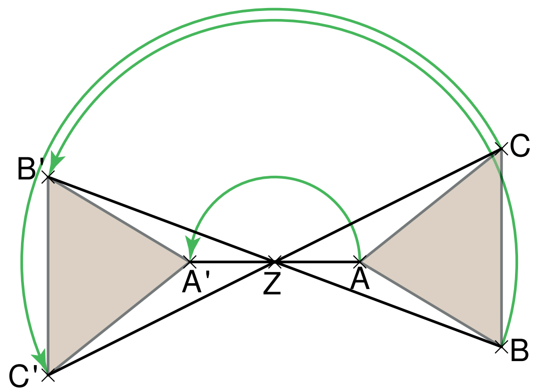
2 Punktspiegelung als Sonderfall der Drehung

Die Punktspiegelung ist der Sonderfall einer Drehung um $180°$.

Eigenschaften: $P \xmapsto{Z} P'$ Drehzentrum Z

- Das Drehzentrum Z ist der einzige Fixpunkt der Punktspiegelung.
- Jede Gerade, die durch das Drehzentrum Z verläuft, ist eine Fixgerade.
- Jede Gerade, die nicht durch das Drehzentrum Z verläuft, wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet.
- Das Drehzentrum Z ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP'}$.

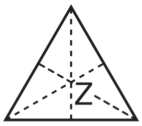
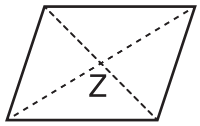
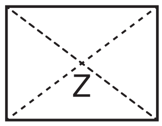
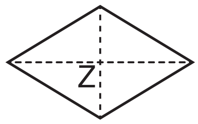
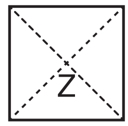
Beispiel: $\Delta ABC \xmapsto{Z} \Delta A'B'C'$



3 Punkt- und drehsymmetrische Figuren

Eine ebene Figur heißt drehsymmetrisch, wenn es einen Punkt Z und mindestens ein Winkelmaß $\alpha \left(\alpha \in \left]0°;360°\right[\right)$ gibt, so dass die Figur durch Drehung an Z um α auf sich selbst abgebildet werden kann.

Eine Figur heißt punktsymmetrisch, wenn es einen Punkt Z gibt, so dass sie durch eine Punktspiegelung an Z auf sich selbst abgebildet werden kann.

 gleichseitiges Dreieck	 Parallelogramm	 Rechteck	 Raute	 Quadrat
drehsymmetrisch für $\alpha \in \{120°;240°\}$	drehsymmetrisch für $\alpha = 180°$			drehsymmetrisch für $\alpha \in \{90°;180°;270°\}$
nicht punktsymmetrisch	punktsymmetrisch			

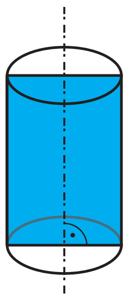
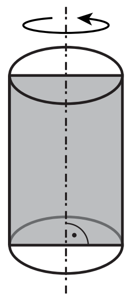
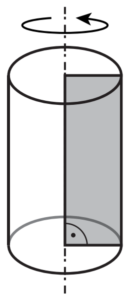
4 Drehung eines Vektors um ± 90° und 180°

	allgemein	Beispiel
Drehung um 90°	$\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \xmapsto{Z;+90°} \begin{pmatrix} -y_v \\ x_v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xmapsto{Z;+90°} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
Drehung um $-90°$	$\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \xmapsto{Z;-90°} \begin{pmatrix} y_v \\ -x_v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xmapsto{Z;-90°} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
Drehung um 180°	$\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \xmapsto{Z;180°} \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xmapsto{Z;180°} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

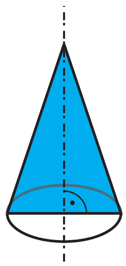
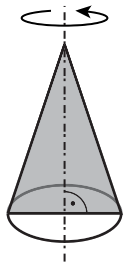
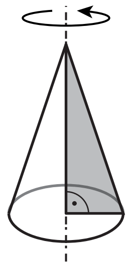
Raumgeometrie

1 Rotationskörper

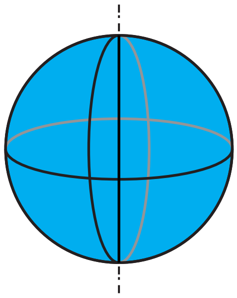
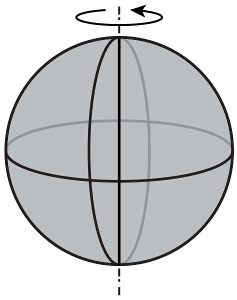
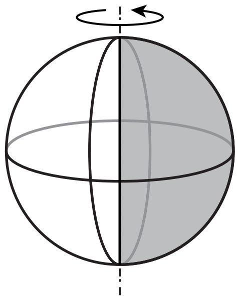
1.1 Zylinder

Zylinder mit Axialschnitt	mögliche Entstehung durch Rotation eines Rechtecks	
		

1.2 Kegel

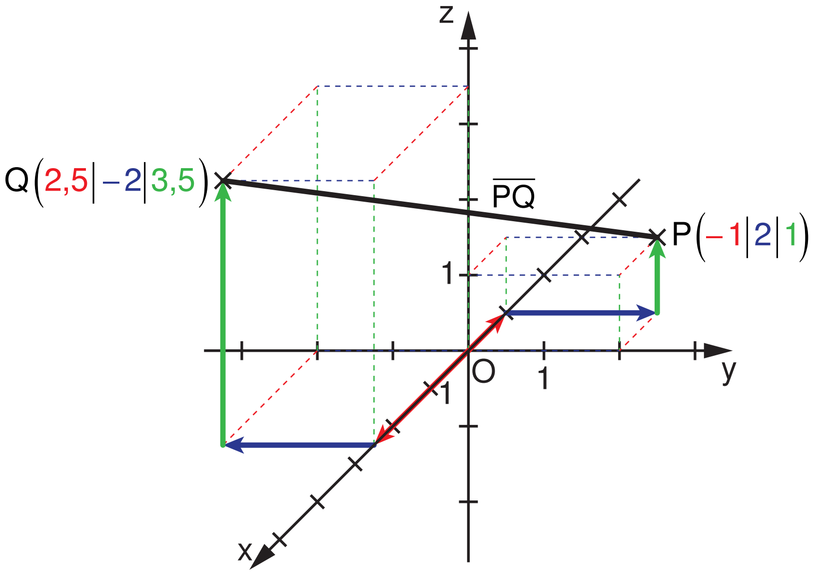
Kegel mit Axialschnitt	mögliche Entstehung durch Rotation eines Dreiecks	
		

1.3 Kugel

Kugel mit Axialschnitt	mögliche Entstehung durch Rotation eines Kreises bzw. eines Halbkreises	
		

2 Dreidimensionales Koordinatensystem

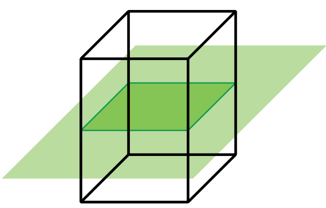
Beispiel: Strecke $\overline{PQ}$ mit $P(-1|2|1)$ und $Q(2{,}5|-2|3{,}5)$



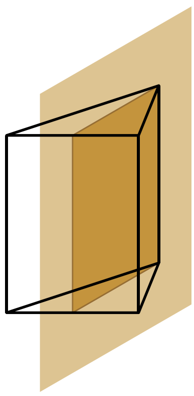
3 Symmetrie im Raum

Beispiele für symmetrische Körper

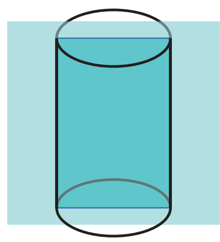
a) Körper können zu Ebenen symmetrisch sein.



Quader



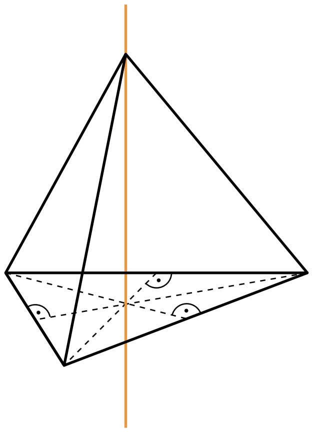
Prisma mit einem gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche



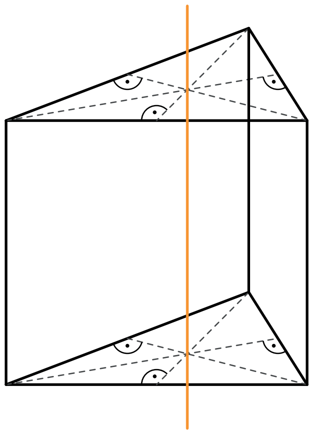
Zylinder

Bei den Körpern ist jeweils nur eine mögliche Symmetrieebene eingezeichnet.

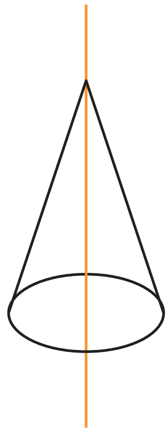
b) Körper können zu Achsen drehsymmetrisch sein.



Pyramide, deren Oberfläche aus vier kongruenten, gleichseitigen Dreiecken besteht



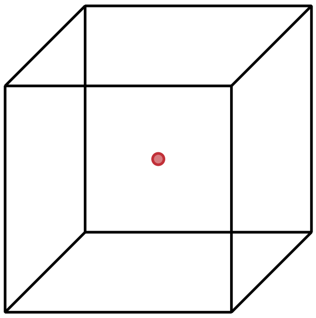
Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche



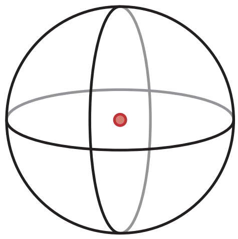
Gerader Kreiskegel

Bei den Körpern ist jeweils nur eine mögliche Symmetrieachse eingezeichnet.

c) Körper können zu einem Punkt symmetrisch sein.



Würfel



Kugel

Bei den Körpern ist jeweils das Symmetriezentrum eingezeichnet.

Terme, Gleichungen und Ungleichungen

1 Termumformungen

1.1 Terme mit verschiedenen Variablen und mit höheren Potenzen multiplizieren

Beispiel: $3a^2\cdot(-2b)^3\cdot a^{-4}\cdot b^6\cdot(-c)$

$3a^2\cdot(-2b)^3\cdot a^{-4}\cdot b^6\cdot(-c)$	
$=3a^2\cdot(-8b^3)\cdot a^{-4}\cdot b^6\cdot(-1c)$	Auflösen von Klammern mit Potenzen
$=3\cdot(-8)\cdot(-1)\cdot a^2\cdot a^{-4}\cdot b^3\cdot b^6\cdot c$	Sortieren nach Zahlen und Variablen
$=24\cdot a^{-2}\cdot b^9\cdot c$ $=24a^{-2}b^9c$	• Produktwert der Zahlen berechnen • Anwenden eines Potenzgesetzes

1.2 Terme mit verschiedenen Variablen und mit höheren Potenzen addieren und subtrahieren

Beispiel: $3ab^2+6b^3-7b^2a-14b^3+2ab$

$3ab^2+6b^3-7b^2a-14b^3+2ab$	
$=3ab^2-7ab^2+6b^3-14b^3+2ab$	Sortieren der Summanden nach gleichartigen Termen
$=(3-7)ab^2+(6-14)b^3+2ab$ $=-4ab^2+(-8)b^3+2ab$ $=-4ab^2-8b^3+2ab$	Zusammenfassen gleichartiger Terme

1.3 Summenterme addieren und subtrahieren

+ vor der Klammer	**– vor der Klammer**
$a+(b+c)=a+b+c$	$a-(b+c)=a-b-c$

Beispiele:

$5x+(3a-4x)=5x+3a-4x=x+3a$

$2a-(-7b+6a)=2a+7b-6a=-4a+7b$

$-3x^2-(-5x^2-6x+7)=-3x^2+5x^2+6x-7=2x^2+6x-7$

1.4 Umwandeln von Produkten in Summen durch Ausmultiplizieren mithilfe des Distributivgesetzes

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
Beispiele: $5xy \cdot (1-4z) = 5xy \cdot 1 - 5xy \cdot 4z = 5xy - 20xyz$ $-4c^2d \cdot (2+9c) = -8c^2d - 36c^3d$ $1{,}5ab \cdot \left(5a - 3b + b^2\right) = 7{,}5a^2b - 4{,}5ab^2 + 1{,}5ab^3$

1.5 Umwandeln von Summen in Produkte durch Faktorisieren bzw. Ausklammern

Regel: Enthält jeder Summand einen gleichen Faktor, kann man diesen mithilfe des Distributivgesetzes ausklammern. $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$
Beispiele: $2xy^2 - 4x^2y = 2xy \cdot y - 2xy \cdot 2x = 2xy \cdot (y - 2x)$ $56c^3d^5 - 28c^2d + 140c^4d^2 = 28c^2d \cdot \left(2cd^4 - 1 + 5c^2d\right)$ $-1{,}5x^3 + 2{,}5x^2y = -0{,}5x^2 \cdot (3x - 5y)$

1.6 Multiplikation von Summentermen

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
Beispiele: $(3x+6) \cdot (2+4x) = 3x \cdot 2 + 3x \cdot 4x + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 4x = 6x + 12x^2 + 12 + 24x = 12x^2 + 30x + 12$ $(3x+6) \cdot (1{,}2y - xy) = 3{,}6xy - 3x^2y + 7{,}2y - 6xy = -3x^2y - 2{,}4xy + 7{,}2y$ $\left(x^2 - y\right) \cdot \left(4x - 3y^3\right) = 4x^3 - 3x^2y^3 - 4xy + 3y^4$

1.7 Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

3. Binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Beispiele:

$(5-3x)^2=5^2-2\cdot 5\cdot 3x+(3x)^2=25-30x+9x^2$

$169y^4-225c^6=(13y^2)^2-(15c^3)^2=(13y^2+15c^3)\cdot(13y^2-15c^3)$

$1{,}96+z^8-2{,}8z^4=1{,}96-2{,}8z^4+z^8=1{,}4^2-2\cdot 1{,}4\cdot z^4+(z^4)^2=(1{,}4-z^4)^2$

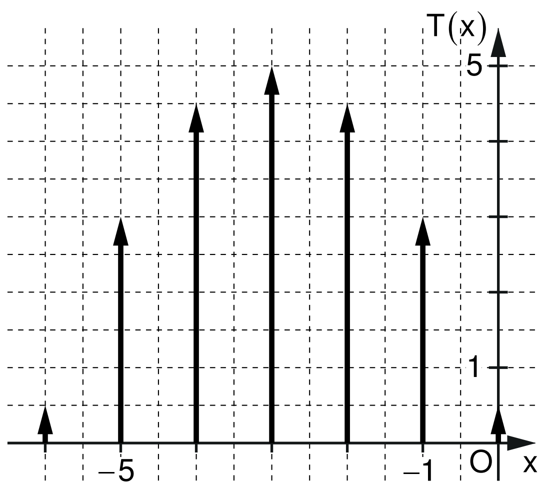
2 Extremwerte quadratischer Terme

Quadratische Terme der Form $T(x)=a\cdot(x-m)^2+n$ mit $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ und $m,n\in\mathbb{Q}$ besitzen einen Extremwert.

	Art des Extremums	Werte
$a>0$	Minimum	$T_{min}=n$ für $x=m$
$a<0$	Maximum	$T_{max}=n$ für $x=m$

Beispiele:

a)



$T_{max}=5$ für $x=-3$

b) $T(x)=0{,}2\cdot(x+4)^2-6$ $\quad T_{min}=-6$ für $x=-4$

c) $T(x)=13-(x-2)^2$ $\quad T_{max}=13$ für $x=2$

d) $T(x)=-x^2+6$ $\quad T_{max}=6$ für $x=0$

e) $T(x)=(x-5)^2$ $\quad T_{min}=0$ für $x=5$

Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 8 (I)

3 Quadratische Ergänzung

Die quadratische Ergänzung dient dazu, einen quadratischen Term der Form ax^2+bx+c so umzuformen, dass sein Extremwert abzulesen ist.

Beispiele:

a)

$0{,}5x^2-4x+1$	
$=0{,}5\left[x^2-8x \qquad +2\right]$	Ausklammern von $0{,}5$
$=0{,}5\left[\underbrace{x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2}_{(x-4)^2}-4^2+2\right]$	Quadratisches Ergänzen mit 4^2
$=0{,}5\left[(x-4)^2 \qquad \underbrace{-4^2+2}_{-14}\right]$	Anwendung der binomischen Formel
$=0{,}5\left[(x-4)^2 \qquad -14\right]$	Zusammenfassen
$=0{,}5(x-4)^2-7$	Auflösen der eckigen Klammer

Extremwert: $T_{min}=-7$ für $x=4$

b)

$-3x^2+30x+24$	
$=-3\left[x^2-10x \qquad -8\right]$	Ausklammern von -3
$=-3\left[\underbrace{x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2}_{(x-5)^2}-5^2-8\right]$	Quadratisches Ergänzen mit 5^2
$=-3\left[(x-5)^2 \qquad \underbrace{-5^2-8}_{-33}\right]$	Anwendung der binomischen Formel
$=-3\left[(x-5)^2 \qquad -33\right]$	Zusammenfassen
$=-3(x-5)^2+99$	Auflösen der eckigen Klammer

Extremwert: $T_{max}=99$ für $x=5$

$$\begin{tikzcd} a\cdot(x-m)^2+n \arrow[r, bend left, "\text{Ausmultiplizieren}"] & ax^2+bx+c \arrow[l, bend left, "\text{Quadratisches Ergänzen}"] \end{tikzcd}$$

Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 8 (I)

4 Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen auf beiden Seiten

Gleichung	Vorgehen	Ungleichung
$4x-8+1-2x=5x+11-6$ $(G=\mathbb{Q})$		$-3\cdot(2x+1)>-2\cdot 1{,}5x+4{,}5$ $(G=\mathbb{Q})$
$\Leftrightarrow 2x-7=5x+5 \quad \vert -2x-5$	Vereinfachen von Links- und Rechtsterm	$\Leftrightarrow -6x-3>-3x+4{,}5 \quad \vert +3x+3$
$\Leftrightarrow -12=3x \quad \vert :3$	Sammeln und Zusammenfassen von • Termen mit Variablen auf der einen Seite • Termen aus Zahlen auf der anderen Seite mithilfe von Äquivalenzumformungen	$\Leftrightarrow -3x>7{,}5 \quad \vert :(-3)$
$\Leftrightarrow -4=x$	Lösen der einfachen Gleichung bzw. Ungleichung	$\Leftrightarrow x<-2{,}5$ **Inversionsgesetz!**
$L=\{-4\}$	Angabe der Lösungsmenge unter Beachtung der Grundmenge	$L=\{x \mid x<-2{,}5\}$

Weitere Beispiele:

a)
$$\begin{aligned} &(2-x)\cdot(x-5)=-3x^2+2x^2+4 && G=\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow\ &2x-10-x^2+5x=-x^2+4 \quad \vert +x^2 &&\\ \Leftrightarrow\ &7x-10=4 \quad \vert +10 &&\\ \Leftrightarrow\ &7x=14 \quad \vert :7 &&\\ \Leftrightarrow\ &x=2 && L=\{2\} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &(x-3)^2>x\cdot(x+7) && G=\mathbb{Q}\\ \Leftrightarrow\ &x^2-6x+9>x^2+7x \quad \vert -x^2 &&\\ \Leftrightarrow\ &-6x+9>7x \quad \vert +6x &&\\ \Leftrightarrow\ &9>13x \quad \vert :13 &&\\ \Leftrightarrow\ &\frac{9}{13}>x && L=\left\{x \,\middle|\, x<\frac{9}{13}\right\} \end{aligned}$$

Bruchterme und Bruchgleichungen

1 Bruchterme und Definitionsmenge

Bruchterme sind Terme mit einer Variable im Nenner.

Beispiel: Bruchterme: $\frac{2}{4x-3}$; $\frac{5x}{(x+6)^2}$

kein Bruchterm: $\frac{4x-3}{2}$

Die Menge aller Zahlen aus einer Grundmenge G, für die der Nenner eines Bruchterms nicht Null wird, nennt man **Definitionsmenge D**. Da man durch Null nicht dividieren darf, muss man aus der Grundmenge G diejenigen Zahlen ausschließen, für die der Nenner Null wird. Erst dann ist der Term definiert.

Beispiel: $T(x)=\frac{2}{4x-3}$ $\quad (G=\mathbb{Q})$

$$
\begin{aligned}
&4x-3=0 \quad &&|+3 \qquad G=\mathbb{Q}\\
\Leftrightarrow\ &4x=3 \quad &&|:4\\
\Leftrightarrow\ &x=0{,}75 \quad && \Rightarrow D=\mathbb{Q}\setminus\{0{,}75\}
\end{aligned}
$$

2 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit mindestens einem Bruchterm.

Beispiele:

a)

$\frac{8}{x+5}=\frac{-6}{3-x} \qquad D=\mathbb{Q}\setminus\{-5;3\}$	Definitionsmenge bestimmen
$\frac{8}{x+5}=\frac{-6}{3-x}$ $\Leftrightarrow 8\cdot(3-x)=-6\cdot(x+5)$	mit den Nennertermen „über Kreuz multiplizieren“
$\Leftrightarrow 24-8x=-6x-30 \quad \mid +30$ $\Leftrightarrow 54-8x=-6x \quad \mid +8x$ $\Leftrightarrow 54=2x \quad \mid :2$ $\Leftrightarrow 27=x$	Ausmultiplizieren (Vereinfachen) und lineare Gleichung lösen
$L=\{27\}$	Lösungsmenge unter Beachtung der Definitionsmenge angeben

b)

$\frac{42}{x+3}=7 \qquad D=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$	Definitionsmenge bestimmen
$\Leftrightarrow \frac{42}{x+3}=7 \quad \mid \cdot(x+3)$ $\Leftrightarrow 42=7\cdot(x+3)$	Äquivalenzumformung (mit dem Nenner des Bruchterms multiplizieren)
$\Leftrightarrow 42=7x+21 \quad \mid -21$ $\Leftrightarrow 21=7x \quad \mid :7$ $\Leftrightarrow 3=x$	Ausmultiplizieren (Vereinfachen) und lineare Gleichung lösen
$L=\{3\}$	Lösungsmenge unter Beachtung der Definitionsmenge angeben

Funktionen

1 Funktion

Eine **Funktion** f ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem x aus der Definitionsmenge D genau ein y aus der Wertemenge W zuordnet.

Beispiel: $f\colon \overbrace{y = \underbrace{x^2 - 4}_{\text{Funktionsterm}}}^{\text{Funktionsgleichung}}$

$x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$ (Grundmengen für x und y)

$D = \mathbb{Q}, W = \{y \mid y \geq -4\}$ (Definitions- und Wertemenge)

Funktionswert für die Belegung $x = -3$: $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$

Die Punkte im Koordinatensystem, die den geordneten Zahlenpaaren $(x \mid y)$ der Funktion entsprechen, bilden den **Graphen** der Funktion.

Nullstelle einer Funktion: Die Belegung von x, für die $f(x) = 0$ gilt, heißt Nullstelle. Der Graph der Funktion hat hier einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Beispiel: $f\colon y = x^2 - 4 \quad (x,y \in \mathbb{Q})$

$0 = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow \quad 0 = (x-2)\cdot(x+2)$

$\Leftrightarrow \quad x = 2 \;\vee\; x = -2$ Die Funktion f hat die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

2 Darstellung von Funktionen

Beispiel:

Funktionsgleichung

$f\colon y = 0{,}25x + 2 \quad (x,y \in \mathbb{Q})$

Wertetabelle

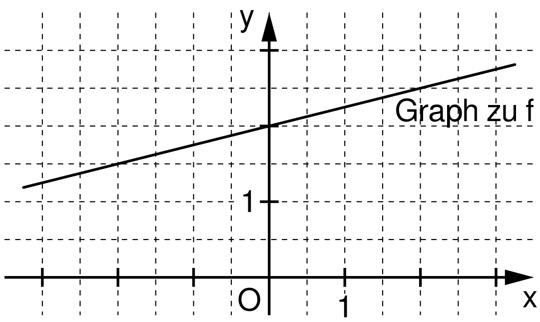
hier für $x \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75

verbale Beschreibung

Den jeweiligen Funktionswert erhält man, indem man ein Element aus der Definitionsmenge mit $0{,}25$ multipliziert und anschließend den Produktwert um 2 vermehrt.

Graph



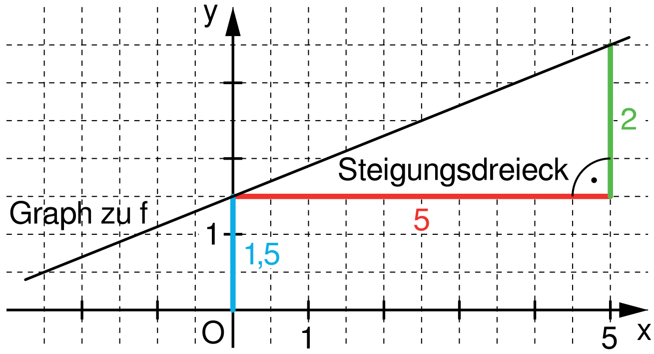
3 Lineare Funktion

Eine Funktion f mit einer Gleichung der Form $y = m \cdot x + t \ (m,t,x,y \in \mathbb{Q})$ ist eine lineare Funktion. Der Graph ist eine Gerade.

Dabei ist m die Steigung und t der y–Achsenabschnitt.

Beispiel:

$$f\colon y = \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Steigung}} \cdot x + 1{,}5 \quad (x,y \in \mathbb{Q})$$

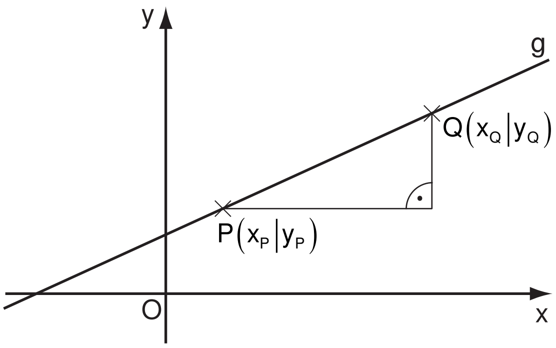


3.1 Steigung

Berechnung von m aus Punktkoordinaten

$P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$; $P,Q \in g$

Steigung: $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$



Steigung paralleler und orthogonaler Geraden

$g_1\colon y = m_1 \cdot x + t_1$ und $g_2\colon y = m_2 \cdot x + t_2$

parallele Geraden	$g_1 \parallel g_2$	$m_1 = m_2$
orthogonale Geraden	$g_1 \perp g_2$	$m_1 \cdot m_2 = -1$

Beispiele:

a) $g_1\colon y = 0{,}2 \cdot x + 4$ und $g_2\colon y = \frac{1}{5} \cdot x + 7$ $\quad m_1 = m_2 = 0{,}2 \quad \Rightarrow g_1 \parallel g_2$

b) $g_1\colon y = 3 \cdot x + 4$ und $g_2\colon y = -\frac{1}{3} \cdot x + 7$ $\quad m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow g_1 \perp g_2$

3.2 Aufstellen von Geradengleichungen

Beispiel: Gegeben ist die Gerade $g = PQ$ mit $P(-3|2)$ und $Q(5|6)$.

$$m = \frac{6-2}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Einsetzen der Koordinaten von Q in $y = 0{,}5 \cdot x + t$ liefert: $6 = 0{,}5 \cdot 5 + t$, also $t = 3{,}5$.

$\Rightarrow g\colon y = 0{,}5 \cdot x + 3{,}5$

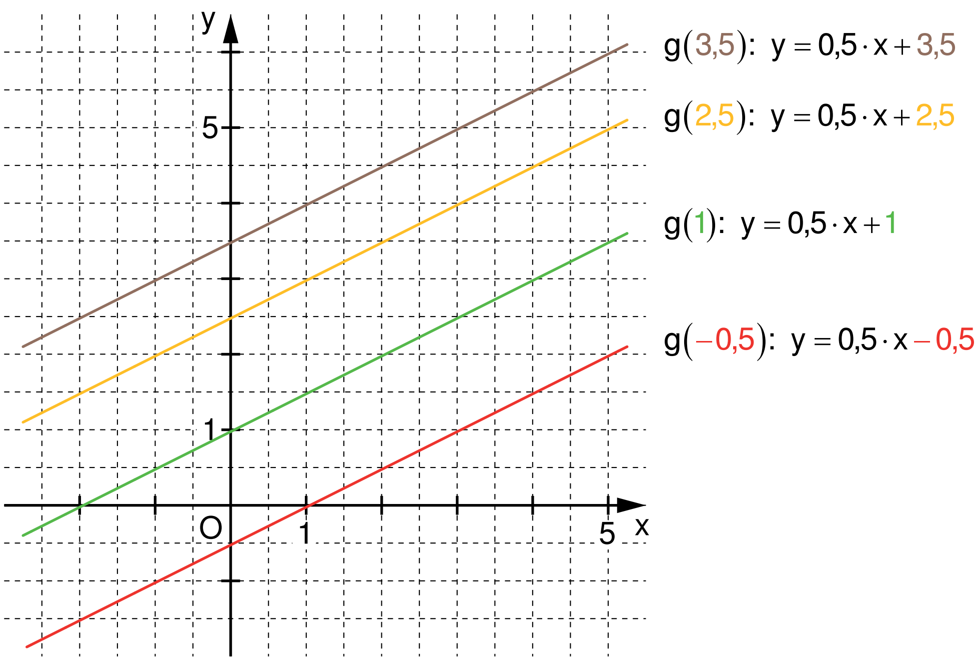
3.3 Spezielle Geraden

Graph	Besonderheit	Gleichung
Ursprungsgeraden	$t = 0$	$y = m \cdot x$
Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $S_y(0\|t)$	$m = 0$	$y = t$
Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $S_x(x_0\|0)$	keine Funktion	$x = x_0$

3.4 Parallelenscharen

Gehören Geraden einer Parallelenschar $g(t)$ an, so haben sie die gleiche Steigung. Sie unterscheiden sich nur im y–Achsenabschnitt t.

Beispiele für Geraden der Parallelenschar $g(t)$: $y = 0{,}5 \cdot x + t$ $(t, x, y \in \mathbb{Q})$:



Daten und Zufall

Ein Vorgang heißt **Zufallsexperiment**, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

1. Das Experiment erfolgt unter genau festgelegten Bedingungen.
2. Das Experiment hat verschiedene mögliche Ergebnisse, die alle vor der Durchführung bekannt sind und von denen jeweils genau eines eintritt.
3. Man kann nicht vorhersagen, welches der möglichen Ergebnisse eintritt.
4. Das Experiment kann grundsätzlich beliebig oft wiederholt werden.

Jeden möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man **Ergebnis**.

Ein oder mehrere Ergebnisse bilden ein **Ereignis**.

Beispiel:

- **Zufallsexperiment**: Einmaliges Werfen eines Spielwürfels
- **mögliche Ergebnisse**: Werfen einer Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf oder Sechs
- **Ereignisse**: z. B. Werfen einer geraden Augenzahl, Werfen einer größeren Augenzahl als Vier, …

1 Absolute und relative Häufigkeit

Wiederholt man dasselbe Zufallsexperiment n-mal und tritt dabei ein Ereignis k-mal ein, so nennt man die Zahl k **absolute Häufigkeit** und den Anteil $\frac{k}{n}$ **relative Häufigkeit** dieses Ereignisses.

Beispiel: Das Zufallsexperiment "Einmaliges Werfen einer Münze“ wird 15-mal durchgeführt. Dabei tritt Kopf (K) siebenmal auf.

Die **absolute Häufigkeit** für K beträgt 7.

Die **relative Häufigkeit** für K beträgt $\frac{7}{15}$.

2 Darstellungsmöglichkeiten

Beispiel: Der Zufallsversuch "Zweimaliges Werfen einer Münze" wird 20-mal durchgeführt.

Vierfeldertafel

	zweiter Wurf Kopf	zweiter Wurf Zahl	
erster Wurf Kopf	3 ($\widehat{=}$ 15 %)	6 ($\widehat{=}$ 30 %)	9 ($\widehat{=}$ 45 %)
erster Wurf Zahl	4 ($\widehat{=}$ 20 %)	7 ($\widehat{=}$ 35 %)	11 ($\widehat{=}$ 55 %)
	7 ($\widehat{=}$ 35 %)	13 ($\widehat{=}$ 65 %)	20 ($\widehat{=}$ 100 %)

Baumdiagramm